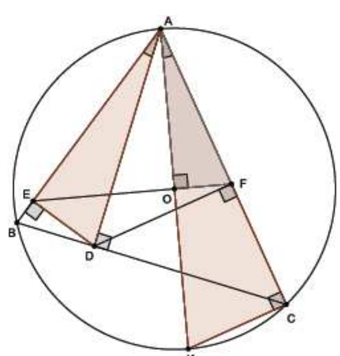
INSPECTORATUL SCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCURESTI
ŞCOALA CU CLASELE I-VIII, NR. 56 - JOSSE MARTI - BUCUREŞTI
C oncursul Interjudețean de Matematică al Şcolii cu clasele I-VIII nr. 56 "Josse Marti"
Ediția a X-a, 22.01.2011
Clasa a VIII-a
Soluții şi bareme

I. Se demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic în C.......**4p**
Din teorema celor trei perpendiculare, rezultă că $EC \perp AC$ ...**3p**

II. Numărul $\frac{1}{a} = \frac{x^2+x+1}{x} = x+1+\frac{1}{x}$ este rațional, deci $x+\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - 1 \in \mathbb{Q}$.**1p**
Înseamnă că $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}-1\right)^2 \in \mathbb{Q}$, deci $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{a}-1\right)^2 - 2 \in \mathbb{Q}$.**1p**
Avem $b = x^2 - 1 - \frac{1}{x^2}$, deci $x^2 - \frac{1}{x^2} = b+1 \in \mathbb{Q}$.....................................**1p**
Rezultă că $x^2 = c \in \mathbb{Q}$..**1p**
Obținem că $a = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{x+c+1}$, de unde $x(1-a) = a(c+1) \in \mathbb{Q}$....**2p**
Dacă $x \notin \mathbb{Q}$, rezultă că $a = 1$, contradicție..**1p**

III. **a)** Inegalitatea este echivalentă cu $(x-y)^2 \ge 0$......................................**1p**
b) Deoarece $a^2+1 \ge 2a$ şi $b^2+1 \ge 2b$, rezultă că **1p**
$1 = \frac{1}{a^2+2b+1} + \frac{1}{b^2+2a+1} \le \frac{1}{2a+2b} + \frac{1}{2a+2b} = \frac{1}{a+b}$, deci $a+b \le 1$...**1p**
Folosind inegalitatea de la punctul **a)** obținem
$1 = \frac{1}{a^2+2b+1} + \frac{1}{b^2+2a+1} \ge \frac{4}{a^2+b^2+2a+2b+2}$.................................**1p**
Deci $a^2+b^2+2(a+b)+2 \ge 4$, echivalent cu $(a+b)^2+2(a+b)+1 \ge 3+2ab$ **1p**
Dacă a şi b nu sunt nule, rezultă că $(a+b+1)^2 > 3$, adică $a+b+1 > \sqrt{3}$, deci
$a+b > \sqrt{3}-1$...**1p**
Dacă , de exemplu, $a = 0$, egalitatea din enunț ne dă $b^3 = \frac{1}{2} > \left(\sqrt{3}-1\right)^3$,
deci $a+b > \sqrt{3}-1$**1p**

IV. Patrulaterul $AEDF$ este inscriptibil, deci $\widehat{DFE} \equiv \widehat{DAE}$.............................**1p**



Deoarece dreptele AD şi AO sunt izogonale, rezultă că $AO \perp FE$..**2p**
Fie $\{O'\} = AO \cap EF$, rezultă că triunghiurile AFO' şi ADB sunt asemenea, deci $\frac{AF}{AB} = \frac{AO'}{AD}$.............................**1p**
Fie K punctul diametral opus lui A. Triunghiurile ACK şi AED sunt asemenea, deci $\frac{AK}{AD} = \frac{AC}{AE} = \sqrt{2}$............**1p**
Din asemănarea triunghiurilor AEF şi ACB rezultă că
$\sqrt{2} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AO'} = \frac{R\sqrt{2}}{AO'}$. Obținem că $O' = O$.**2p**